

MEMO BvtH/M08.079
Datum 24-nov-2008
Auteur(s) Bas van 't Hof
Onderwerp Verwerking van diagonale overlaten in WAQUA

Documentinformatie

Versie	Auteur	Datum	Opmerkingen	Review
0.1	BvtH	14-11-2008	Eerste beschreven aanpak	EV
0.2	BvtH	24-11-2008	Verwerking opmerkingen EV	
Bestandslokatie:		/home/vortech/Memos		

1 Inleiding

In melding c86278 van het onderhoudscontract voor SIMONA wordt onderzocht op welke manier schuine overlaten kunnen worden verwerkt in simulaties van waterbeweging met het pakket WAQUA/TRIWAQ (afgekort tot 'WAQUA'). Met name wordt daarbij gekeken naar de mogelijkheden van impliciete tijdsintegrale van de modelvergelijkingen.

WAQUA berekent de beweging van het water op basis van de twee- of driedimensionale ondiepwatervergelijking. De ondiepwatervergelijking is een model voor waterbeweging dat in veel gevallen zeer nauwkeurig is. In sommige gevallen echter komt het ondiepwatermodel niet voldoende overeen met de werkelijkheid. Voor dergelijke gevallen zijn uitbreidingen in WAQUA opgenomen. De belangrijkste gevallen wanneer het ondiepwatermodel niet voldoende nauwkeurig is, zijn:

- wanneer er sterke turbulentie optreedt;
- wanneer de waterbeweging niet voornamelijk horizontaal is.
- wanneer er relevante landschapselementen voorkomen die kleiner zijn dan het gebruikte rooster;

Voor deze drie gevallen zijn de volgende uitbreidingen in WAQUA beschikbaar:

- horizontale en/of verticale ($k-\epsilon$) turbulentiemodellen;
- niet-hydrostatische waterbewegingsmodellen;
- subgrid-modellen zoals barriers en overlaten.

In melding c74809 is een van dergelijke uitbreidingen, te weten het subgrid-model voor overlaten, grondig bestudeerd. Overlaten zijn eenvoudige obstakels, die zodanig abrupt zijn dat de waterstroming lokaal niet voornamelijk horizontaal is en er veel turbulentie optreedt, en die zodanig dun zijn dat ze niet in detail in het rooster kunnen worden weergegeven.

In melding c74809 is het mogelijk gemaakt om de bestaande mathematisch-fysische modellering (in nauwelijks gewijzigde vorm) te verwerken met impliciete in plaats van expliciete tijdsintegratie. Hierdoor worden simulatieresultaten minder grillig en daardoor betrouwbaarder, en kan een grotere tijdstap worden gebruikt, wat rekentijd kan besparen.

Melding c74809 beperkte zich tot zogenaamde 'rechte' overlaten, die op een rooster-lijn liggen. SIMONA biedt echter ook de mogelijkheid om 'diagonale' overlaten te specificeren, die evenwijdig lopen aan de diagonaal van de controle-volumes.

Het centrale punt in de aanpak die wij voorstaan bij de verwerking van diagonale overlaten in een model is dat er geen verschil is in de fysica tussen een diagonale en een rechte overlaat: in werkelijkheid komen er immers geen roosters voor. Een andere kwestie is die van rechte en scheve *aanstroming* van een overlaat, welke helemaal los staat van de plaatsing van de overlaat in het rooster. In de huidige melding wordt onderzocht hoe de verwerking van dergelijke schuine overlaten zo kan worden uitgevoerd, dat het model van een schuine overlaat zo goed mogelijk overeen komt met dat van een rechte overlaat.

In dit onderzoek wordt een werkwijze gevolgd die in melding c74809 goede resultaten heeft opgeleverd: eerst wordt een manier van verwerken voorgesteld, zonder teveel te kijken naar de manier waarop dat in de huidige programmatuur gebeurt. Pas wanneer voldoende duidelijk is hoe de berekening zou kunnen worden uitgevoerd, wordt bekeken in hoeverre deze aanpak in overeenstemming is met de bestaande programmatuur.

Een belangrijke kwestie in de huidige melding betreft de vergelijking van een 'recht' met een 'schuin' model. Om dat mogelijk te maken zijn een 'recht' en een 'schuin' model ontwikkeld van het zelfde gebied, waarin middels een perl-script een groot aantal zaken kunnen worden gevarieerd. Deze modellen kunnen worden gebruikt om 'schuine' en 'rechte' berekeningen met elkaar te vergelijken.

2 Test-domein: een schuin en een recht model van hetzelfde gebied

Een vierkant gebied met een overlaat kan worden gemodelleerd met een 'recht' rooster, waarin de roosterlijnen evenwijdig lopen aan de zijden van het vierkant, maar ook met een 'schuin' rooster, waarin de roosterlijnen evenwijdig lopen aan de diagonalen van het vierkant, zoals is te zien in Figuur 1. Zo worden twee verschillende modellen verkregen voor het zelfde domein. Wanneer in het domein een overlaat voorkomt, is dat in het 'rechte' rooster een rechte overlaat, en in het 'schuine' rooster een diagonale overlaat. Dit is van belang omdat we de verwerking van schuine overlaten zullen gaan onderzoeken door vast te stellen of de resultaten van de beide modellen voor het zelfde domein met elkaar overeen komen.

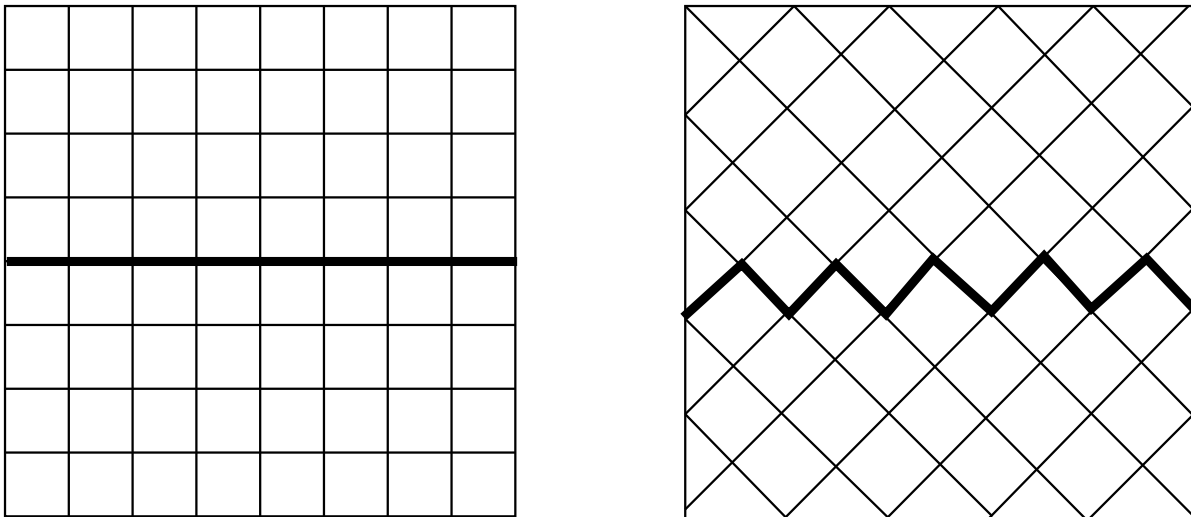
Door de resultaten van verschillende varianten van dit model met elkaar te vergelijken, hopen

we te weten te komen welke situaties wel en welke niet correct kunnen worden verwerkt, zowel met de huidige versie van WAQUA als met de nieuwe versie, die we gaan maken in de loop van dit project. Een aantal van de schematisaties die we verwachten uit te gaan voeren zijn:

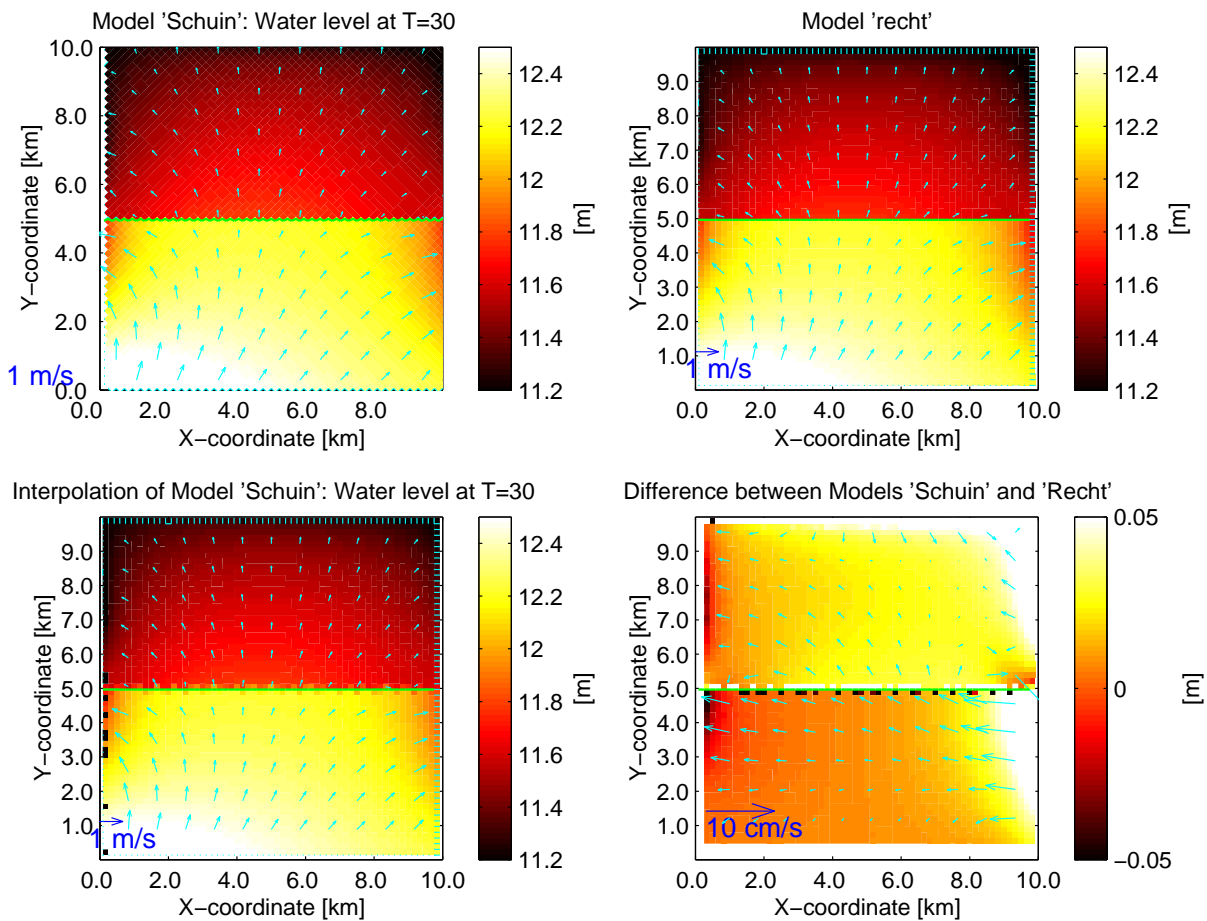
- Chézy-stroming zonder overlaat, zowel recht door het domein als schuin door het domein; Hiermee kan worden onderzocht hoe groot de verschillen tussen de twee modellen kunnen zijn ten gevolge van de verwerking van de randvoorwaarden;
- Loodrechte aanstroming van een overlaat;
- Evenwijdige aanstroming van een overlaat; Mogelijk zullen we aan beide zijden van de overlaat een Chézy-stroming laten lopen, waarbij water over de overlaat zal lopen wanneer de waterstanden aan weerszijden van de overlaat verschillen en minstens één waterstand boven de overlaat uit komt.
- Schuine aanstroming van een overlaat;

Bij deze mogelijkheden moet het effect van de gebruikte roosterafstand en tijdstap worden onderzocht.

We hebben reeds een zodanig model gemaakt, waarbij een perl-script kan worden gebruikt om allerlei zaken in het model te variëren, en waarbij een gestandaardiseerd Matlab-script de vergelijkingen uitvoert en visualiseert. In Figuur 2 is een voorbeeld te zien van een dergelijke vergelijking. De schematisatie die in dat voorbeeld is gebruikt dient alleen maar om het soort berekeningen te laten zien die we willen gaan doen, en komt niet voor in de eerder genoemde lijst van te onderzoeken schematisaties.



Figuur 1: Een vierkant gebied met een overlaat kan worden gemodelleerd met een 'recht' rooster, waarin de roosterlijnen evenwijdig lopen aan de zijden van het vierkant, maar ook met een 'schuin' rooster, waarin de roosterlijnen evenwijdig lopen aan de diagonalen van het vierkant.



Figuur 2: De simulatieresultaten verkregen met het schuine en met het rechte rooster komen bij gebruik van een fijn rooster goed met elkaar overeen. Op de hoeken zijn (constante) waterstanden voorgeschreven van 12.70, 12.45, 11.00 en 10.50 meter. Er is een tijdstap gebruikt van 3.75 sec, en een roosterafstand van 166 meter.

3 Globaal overzicht van de te volgen aanpak

Het uitgangspunt op basis waarvan we van plan zijn om een goede manier te vinden voor de verwerking van schuine overlaten, is dat de impulsvergelijking in de richting langs de overlaat geldig is nabij de overlaat, zonder dat er extra termen in voorkomen ten gevolge van de overlaat. Met dit uitgangspunt kan een lineaire combinatie van de u -en v -impulsvergelijking worden gemaakt en gediscretiseerd.

De vergelijking in de richting loodrecht op de overlaat wordt gegeven door het overlaat-model: bij onvolkomen afstroom geldt een impulsvergelijking met een extra term, en in geval van volkomen afstroom geldt een Q-H relatie. Zo komen we aan twee vergelijkingen, voor de beide onbekenden u en v .

In een berekening (een call naar `trssuw` of een call naar `trscue`) worden alleen de stroomsnelheden in één van beide rooster-richtingen aangepast. In de hierboven geschetste aanpak worden op schuine overlaten aanpassingen gedaan aan beide stroomsnelheidscomponenten. Het is echter niet de bedoeling dat er werkelijke aanpassingen worden gedaan in de 'andere' stroomsnelheidscomponent. Deze onbekenden worden daarom in werkvariabelen opgeslagen, en hun waarde wordt niet meer gebruikt nadat de berekening ten einde is gekomen. Hun nut bestaat er alleen uit dat de juiste stroomsnelheden in de ene rooster-richting konden worden berekend. Uiteraard moet in de loop van dit project, zowel theoretisch als praktisch (door resultaten te bestuderen), worden nagegaan of deze aanpak inderdaad de gewenste resultaten kan geven.

4 Interpolatie van veld-waarden naar een schuine overlaat

In deze sectie wordt een aantal zaken op een rij gezet die we over een schuine overlaat kunnen vaststellen. Het gaat over de berekening van waarden op de overlaat uit de waarden die bekend zijn in de veld-arrays.

We gaan hierbij uit van een overlaat van het zogenaamde 'type 5' (u - en v - punt met dezelfde (m,n) coördinaten), die wordt getoond in Figuur 3. De andere typen van schuine overlaten worden op een analoge manier behandeld.

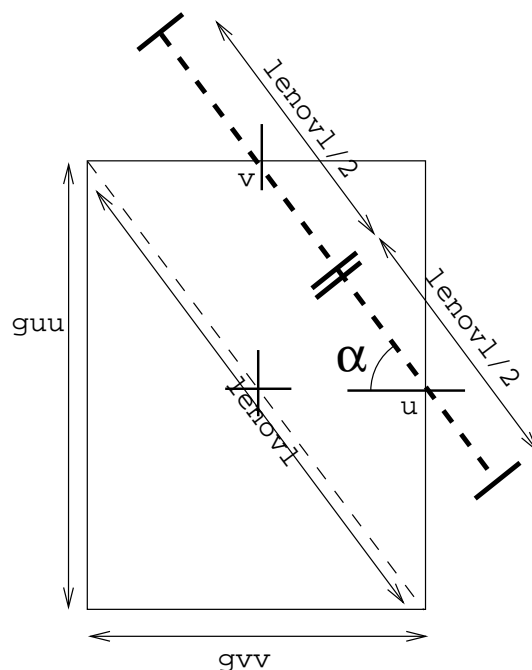
Het eerste wat we moeten vaststellen, is de plaats waar we de overlaat veronderstellen te zijn. In de figuur is deze plaats te zien: de overlaat loop parallel aan de diagonaal door de rooster cel en is ook even lang als deze diagonaal. De overlaat ligt echter een kwart roosterlengte rechts en een kwart roosterlengte boven de diagonaal van de rooster cel.

De lengte van de overlaat is eenvoudig te berekenen met behulp van de stelling van Pythagoras:

$$\text{lenovl} = \sqrt{\text{guu}^2 + \text{gvv}^2}. \quad (1)$$

De hoek α die de overlaat maakt kan ook eenvoudig uit de tekening worden afgelezen:

$$(\cos(\alpha), \sin(\alpha)) = \left(\frac{\text{gvv}}{\text{lenovl}}, \frac{\text{guu}}{\text{lenovl}} \right) = \left(\left(1 + \frac{\text{guu}}{\text{gvv}} \right)^{-1/2}, \left(1 + \frac{\text{gvv}}{\text{guu}} \right)^{-1/2} \right). \quad (2)$$



Figuur 3: Een roostercel met een schuine overlaat van type 5 (u- en v- punt met dezelfde (m,n) coördinaten).

Het debiet over de overlaat is gelijk aan het debiet over de beide cell-faces samen:

$$q_{loodr} = q_x + q_y = u * g_{uu} * h_u + v * g_{vv} * h_v. \quad (3)$$

De waarden die we tot nu toe hebben berekend op de overlaat zelf zijn redelijk vanzelfsprekend. De zogenaamde *veldwaarden* voor de snelheidscomponenten loodrecht op en evenwijdig met de overlaat (die vlak voor de overlaat geldig zijn) zijn echter minder eenvoudig af te leiden uit de tekening. Een eenvoudige keuze voor de stroomsnelheid v_{loodr} loodrecht op de overlaat zou gebruik maken van de cosinus en sinus van de hoek α . Men krijgt dan $v_{loodr_0} = \cos(\alpha)*u + \sin(\alpha)*v$. Echter, het zou dan (wanneer h_u en h_v van elkaar verschillen) mogelijk zijn dat de stroomsnelheid loodrecht op de overlaat nul is, terwijl er wel een debiet over overlaat is. Daarom wordt er voor gekozen dat de beide componenten u en v in dezelfde verhoudingen voorkomen in de stroomsnelheid loodrecht op de overlaat als in het debiet over de overlaat:

$$\begin{aligned} v_{loodr} &= \frac{u * g_{uu} * h_u + v * g_{vv} * h_v}{\sqrt{(g_{uu} * h_u)^2 + (g_{vv} * h_v)^2}} \\ &= \cos(\beta)*u + \sin(\beta)*v, \end{aligned} \quad (4)$$

waarbij de hoek β wordt gegeven door

$$(\cos(\beta), \sin(\beta)) = \left(1 + \left(\frac{g_{vv} * h_v}{g_{uu} * h_u}\right)\right)^{-1/2} u + \left(1 + \left(\frac{g_{uu} * h_u}{g_{vv} * h_v}\right)\right)^{-1/2} v. \quad (5)$$

De hoeken α en β zijn aan elkaar gelijk wanneer de doorstroomhoogten h_u en h_v aan elkaar gelijk zijn.

De veldwaarde van doorstroomhoogte $hovl$ vlak voor de overlaat kan worden bereken uit het debiet $qloodr$ over de overlaat, de stroomsnelheid $vloodr$ loodrecht op de overlaat en de lengte $lenovl$ van de overlaat. Er zou immers moeten gelden:

$$qloodr = lenovl * vloodr * hovl, \quad (6)$$

waaruit de (niet-lineaire) formule voor de doorstroomhoogte vlak voor de overlaat volgt:

$$hovl = \frac{qloodr}{lenovl * vloodr} = \sqrt{\frac{hu^2}{1 + gvv^2/guu^2} + \frac{hv^2}{1 + gvv^2/guu^2}}. \quad (7)$$

De stroomsnelheid langs de overlaat kan worden uitgerekend met behulp van de hoek α of met de hoek β . Het is mij nog niet duidelijk welke formulering het beste is:

$$\begin{aligned} vlangs &= -\sin(\alpha)*u + \cos(\alpha)*v, & \text{of} \\ vlangs &= -\sin(\beta)*u + \cos(\beta)*v. \end{aligned} \quad (8)$$

Wanneer de laatste formulering gebruikt wordt, geldt de eigenschap dat de (totale) stroomsterkte in de oriëntatie van het rooster gelijk is als die in de oriëntatie van de overlaat:

$$|(vlangs, vloodr)| = |(u, v)|. \quad (9)$$

De waterstanden aan weerszijden van de overlaat worden met eerste orde upwind interpolatie verkregen. De waterstand linksonder is derhalve de waterstand $\zeta_{m,n}$ in het eigen roosterpunt. De waterstand rechtsboven de overlaat is echter het gemiddelde van de waterstanden $\zeta_{m+1,n}$ rechts en $\zeta_{m,n+1}$ boven:

$$\zeta_{lo} = \zeta_{m,n} \quad , \quad \zeta_{rb} = \frac{1}{2} (\zeta_{m+1,n} + \zeta_{m,n+1}). \quad (10)$$

5 Impulsvergelijking voor de langs-snelheid

De impulsvergelijking voor de langs-snelheid is een 'gewone' impulsvergelijking, zonder extra termen. Als de 'gewone' impulsvergelijking, waarin de overlaat wordt genegeerd, gegeven wordt door:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A_u \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} = A_v, \quad (11)$$

dan wordt de impulsvergelijking voor de langs-snelheid dus gegeven door

$$\frac{\partial vlangs}{\partial t} = -\sin(\beta) \frac{\partial u}{\partial t} + \cos(\beta) \frac{\partial v}{\partial t} = -\sin(\beta)A_u + \cos(\beta)A_v. \quad (12)$$

Hierbij zijn de veranderingen in de hoek β verwaarloosd.

6 Impulsvergelijking voor de snelheid loodrecht op de overlaat bij onvolkomen afstroom

In het geval van onvolkomen afstroom geldt er een impulsvergelijking met daarin een energieverliesterm ΔE :

$$\frac{\partial \mathbf{v}_{loodr}}{\partial t} = \cos(\beta) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sin(\beta) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \cos(\beta) A_u + \sin(\beta) A_v + \Delta E (\cos(\beta) \mathbf{u} + \sin(\beta) \mathbf{v}, \zeta_{lo}, \zeta_{rb}). \quad (13)$$

Weer worden de veranderingen in de hoek β verwaarloosd.

De zo opgestelde impulsvergelijkingen kunnen worden gecombineerd tot de impulsvergelijkingen in de beide rooster-richtingen:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = A_u + \cos(\beta) \Delta E \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = A_v + \sin(\beta) \Delta E. \quad (14)$$

Het energieverlies wordt berekend met behulp van de nieuwe stroomsnelheden \mathbf{u} en \mathbf{v} . De waterstand $\zeta_{m,n+1}$ wordt in ieder geval expliciet genomen; de waterstanden $\zeta_{m+1,n}$ en $\zeta_{m,n}$ worden impliciet berekend in `trssuw`. De waterstand $\zeta_{lo} = \zeta_{m,n}$ 'linksonder' wordt in dat geval volledig impliciet genomen, terwijl de waterstand $\zeta_{rb} = \frac{1}{2}(\zeta_{m+1,n} + \zeta_{m,n+1})$ 'rechtsboven' half-impliciet wordt genomen.

Voor de v -impuls wordt een simpele discretisatie genomen, waarin alleen de bodemwrijving en het energieverlies impliciet worden genomen, en de rest expliciet. De benodigde termen voor deze impulsvergelijking kunnen worden uitgerekend in de voorgaande berekening.

Voor de u -impuls wordt de gebruikelijke discretisatie genomen (impliciete bodemwrijving, impliciet energieverlies, in `trscue` expliciete waterstanden en impliciete advection/viscositeit en in `trssuw` impliciete waterstanden en expliciete advection/viscositeit).

Het resultaat is een niet-lineair stelsel, waarin de stroomsterkte \mathbf{v} kan worden geëlimineerd. Het niet-lineaire stelsel kan worden gelineariseerd en opgelost. De oplossing \mathbf{v} wordt wel berekend, maar niet opgeslagen in de uitvoer van de berekening. Zo blijft het zo, dat alleen de stroomsnelheden in een roosterrichting worden aangepast in een berekening.

6.1 Debietvoorwaarde bij volkomen afstroom

In het geval van volkomen afstroom geldt er een Q-H relatie: bij een bovenstroomse waterstand ligt het debiet over de overlaat vast. Deze relatie kan worden omgevormd tot een $V-H$ relatie, waarin de stroomsnelheid wordt uitgerekend uit de bovenstroomse waterstand:

$$\mathbf{v}_{loodr} = \cos(\beta) * \mathbf{u} + \sin(\beta) * \mathbf{v} = V(\zeta_{lo}, \zeta_{rb}). \quad (15)$$

Deze vergelijking kan op een soortgelijke manier worden gecombineerd met de impulsvergelijking langs de overlaat als in het geval van onvolkomen afstroom.

Omdat er meer onbekenden in het systeem voorkomen, kan er waarschijnlijk veel minder vooraf geanalyseerd worden dan in het geval van een rechte overlaat. We zullen daarom waarschijnlijk veel minder gebruik kunnen maken van speciale oplosmethoden, en meer standaardmethoden moeten toepassen.